Санкт-Петербургский государственный университет

Фреймы Габора для рациональных функций

Выпускная квалификационная работа
студента 4 курса очной формы обучения
Гаваза Константина Григорьевича
Образовательная программа бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01. «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2016

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Белов Юрий Сергеевич

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

1 Введение

Одна из классических задач гармонического анализа — восстановление функции (сигнала) $f \in L^2(\mathbb{R})$ по серии измерений (сэмплов) (f, h_n), где h_n – подходящий набор гармоник. В первую очередь мы потребуем, чтобы было выполнено свойство единственности, $(f, e_n) = 0 \Rightarrow f = 0$. Другое ключевое требование - устойчивость процедуры восстановления (малые изменения последовательности данных (f, h_n) соответствуют малым изменениям f). Это приводит нас к следующему определению:

Определение 1. *Система векторов $E = \{u_j\}$ в гильбертовом пространстве H называется фреймом, если существуют некоторые константы $0 < a < A < \infty$ такие, что*

$$a||f||^2 \leq \sum_{u_j \in E} |(f, u_j)|^2 \leq A||f||^2 \tag{1}$$

для любой функции $f \in H$.

1.1 Анализ Габора

Важный конкретный пример системы гармоник – системы Габора. Для описания систем Габора определим частотно-временной сдвиг.

Определение 2. *Пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$ и $s, t \in \mathbb{R}$. Тогда функция*

$$g_{s,t}(x) = e^{2\pi i s x} g(x - t).$$

называется частотно-временным сдвигом функции g.

Пусть задана решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ и некоторая функция $g \in L^2(\mathbb{R})$. Можно определить систему Габора, порожденную решеткой Λ и функцией g:

Определение 3. *Система частотно-временных сдвигов $\mathcal{G}(g, \Lambda)$, где*

$$\mathcal{G}(g, \Lambda) = \{g_{a,b}(x) : (a, b) = \lambda \in \Lambda\},$$

называется системой Габора.

Следовательно, если для системы Габора $\mathcal{G}(g, \Lambda)$ выполнено условие (1) для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, то она фрейм.

Главный вопрос анализа Габора:

Вопрос 1. *Какие пары (g, Λ) порождают фрейм в пространстве $L^2(\mathbb{R})$?*

В такой общности вопрос выглядит очень сложным. В частности, полный ответ известен лишь для гауссовской функции $g(x) = e^{-\pi x^2}$, (и ее очевидных модификаций - растяжение, сдвиг, модуляция). Данный результат был описан К. Сейпом в работе [2]. Поэтому естественно сузить класс рассматриваемых частотно-временных сдвигов Λ. Мы будем рассматривать в качестве Λ только прямоугольные решетки:

$$\Lambda = \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z},$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Еще одно важное понятие в анализе Габора — это фрейм множество для функции $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Определение 4. *Пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда множество*

$$\mathcal{F}(g) = \{(a, b) : \Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}, \quad \mathcal{G}(g, \Lambda) - \text{фрейм}\}$$

называется фрейм множеством для функции g.

Рассмотрим теорему 7.5.1 из [1]:

Теорема 1. *Система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ фрейм в $L^2(\mathbb{R})$, тогда $\alpha\beta \leq 1$.*

Таким образом, $\mathcal{F}(g) \subset \{\alpha, \beta : \alpha\beta \leq 1\}$ для любой функции $g \in L^2(\mathbb{R})$, то есть $\{\alpha, \beta : \alpha\beta \leq 1\}$ — максимальное фрейм множество.

Лишь для очень узкого класса функций $g \in L^2(\mathbb{R})$ известно полное описание множества $\mathcal{F}$. Рассмотрим конкретные примеры:

- для гауссиана $(g_1(t) = e^{-\pi t^2})$, гиперболического секанса $(g_2(t) = (e^t + e^{-t})^{-1})$, экспоненциальной функции $(g_3(t) = e^{-|t|})$ фрейм множества совпадают и имеют следующий вид:

$$\mathcal{F}(g_k) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha\beta < 1\};$$

- для односторонней экспоненциальной функции $(g(t) = e^{-t}\chi_{\mathbb{R}_+}(t))$ фрейм множество:

$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha\beta \leq 1\}.$$

Также рассмотрим класс тотально положительных функций.

Определение 5. *Непостоянная измеримая функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется тотально положительной функцией, если для любых последовательностей*

$$x_1 < x_2 < ... < x_N, \quad y_1 < y_2 < ... < y_N,$$

где $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, выполнено условие

$$D = \det\left[g(x_j - y_k)\right]_{1 \leq j,k \leq n} \geq 0.$$

В работе [5] И. Шенберг получил эквивалентное описание тотально положительных функций:

Теорема 2. *Функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — тотально положительная функция тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье представимо в виде:*

$$\hat{g}(\xi) = e^{-\gamma\xi^2} \cdot e^{i\delta z} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + 2\pi i \delta_\nu \xi)^{-1} e^{2\pi i \delta_\nu},$$

$\gamma \geq 0, \quad \delta, \delta_\nu \in \mathbb{R}.$

Определение 6. *Мы будем говорить, что функция g тотально положительная функция конечного типа M, если*

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{\nu=1}^{M} (1 + 2\pi i \delta_\nu \xi)^{-1},$$

$\delta_\nu \in \mathbb{R}$.

В статье [3] доказывается следующая теорема для тотально положительных функций:

Теорема 3. *Пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$ — тотально положительная функция конечного типа ≥ 2. Тогда*
$$\mathcal{F}(g) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha\beta < 1\}.$$
Другими словами, система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta < 1$.

Аналогичный результат был описан в статье [4] для g — тотально положительных функций гауссовского типа:

Определение 7. *Функция g называется тотально положительной функцией гауссовского типа, если она представима в виде*

$$\hat{g}(\xi) = \prod_{\nu=1}^{M} (1 + 2\pi i \delta_\nu \xi)^{-1} e^{-c\xi^2},$$

где $\delta_\nu \in \mathbb{R}$, $M > 2$ и $c > 0$.

Для этого класса функций известен следующий результат:

Теорема 4. *Пусть g — тотально положительная функция гауссовского типа. Тогда система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta < 1$.*

Мы будем рассматривать только системы Габора, порожденные рациональными функциями g. Очевидно, что, если g не имеет кратных полюсов, то

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{x - i\omega_k}.$$

Недавно Ю. Белов, Ю. Любарский и А. Куликов доказали следующий результат для рациональных функций:

Теорема 5. *Пусть g — рациональная функция такая, что*

$$a_k > 0, w_k > 0.$$

Тогда система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta \leq 1$.

Пользуясь идеями из работы Ю. Белова, Ю. Любарского и А. Куликова мы докажем аналогичный результат для рациональных функций степени два:

Теорема 6. *Пусть g — рациональная функция степени 2 и*

$$a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} \neq 0, \quad \xi > 0.$$

Тогда система $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta \leq 1$.

А также приведем серию контрпримеров для рациональных функций малых степеней:

Пример 1. *Пусть* $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\beta = 1$ *и*

$$f(x) = \frac{-1.59..+0.38..i}{x - i(-0.84.. - 0.84..i)} + \frac{-0.26..+0.66..i}{x - i(-0.92.. + 0.48..i)} + \frac{1}{x - i(-0.96.. - 0.24..i)}.$$

Тогда $\mathcal{G}(f, \frac{3\sqrt{2}}{5}, 1)$ *не фрейм.*

Пример 2. *Пусть* $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\beta = 1$ *и*

$$f(x) = \frac{0.11..+0.08..i}{x - 0.85.. - 1.00..i} + \frac{-0.19..+0.11..i}{x - 0.9.. + 0.75..i} + \frac{-0.74..+0.42..i}{x - 0.95.. - 0.15..i} + \frac{1}{x - 1.00.. + 0.55..i}.$$

Тогда $\mathcal{G}(f, \frac{3\sqrt{2}}{5}, 1)$ *не фрейм.*

Вообще говоря, это первые нетривиальные примеры систем Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$, $\alpha\beta < 1$ с иррациональным параметром $\alpha\beta$.

1.2 Обозначения и структура работы

В данной работе мы будем обозначать скалярное произведение в гильбертовом пространстве как $(\cdot, \cdot)$. Также мощность некоторого множества J мы будем обозначать как $|J|$. Дробную часть числа ξ — $\{\xi\}$. Сравнение $f(x) \asymp g(x)$ означает, что существуют константы $0 < c < C < \infty$ такие, что

$$cg(x) \le f(x) \le Cg(x).$$

Опишем структуру этой работы. В параграфе 2 мы выведем интегральное неравенство, которое эквивалентно (1) и и предъявим достаточное условие фреймовости в параграфе 3. Более подробно мы рассмотрим случай для $N = 2$ (в параграфе 4). Для $N = 3$ и $N = 4$ приведем примеры систем Габора, порожденных рациональными функциями, которые не фрейм, последние результаты описаны в параграфах 5 и 6 соответственно.

2 Интегральное неравенство

В данном параграфе мы выведем интегральное неравенство, эквивалентное неравенству (1) из определения фрейма. Позже мы докажем, что верхняя оценка для рациональных функций будет выполнена всегда, поэтому мы сосредоточим свое внимание на нижней оценке из (1).

Замечание 1. *Пусть $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$ система Габора, g - рациональная функция и $\alpha\beta \le 1$. Можно считать, что $\alpha \le 1$, а $\beta = 1$.*

Доказательство. При замене переменных класс рассматриваемых функций переходит в себя.

Таким образом, если $\beta = 1$, то по теореме 1 получаем, что $\alpha \le 1$. □

При доказательстве теоремы 7 мы будем рассматривать пространство Пэли-Винера.

Определение 8. *Пространство Пэли-Винера на $S \subset \mathbb{R}$ определяется как пространство всех функций $f \in L^2(\mathbb{R})$, у которых $\hat{f} = 0$ п. в. вне S.*

Докажем теорему об интегральном неравенстве, которое эквивалентно нижней оценке из (1).

Теорема 7. *Следующие два условия эквивалентны:*

1. *Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ выполнено*

$$\sum_{n,m} |(g_{n,m}, f)|^2 \ge \varepsilon ||f||_2^2 \tag{2}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

2. *Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ выполнено*

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} f\Big(\xi + n + \frac{s}{\alpha}\Big) m_s(\xi)|^2 d\xi \ge \varepsilon' ||f||_2^2 \tag{3}$$

для некоторого $\varepsilon' > 0$ (функции m_s определены ниже, см. (9)).

Доказательство. Воспользуемся двойственностью:

$$\sum_{n,m} |(g_{n,m}, f)|^2 = \sup_{||c_{n,m}||_{l_2}=1} |\sum_{n,m} c_{n,m}(g_{n,m}, f)|.$$

Зафиксируем n и рассмотрим сумму по индексу m:

$$\sum_m c_{n,m}(g_{n,m}, f) = \sum_{k=1}^N a_k \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \sum_m \frac{c_{n,m}}{x - (\alpha m + i\omega_k)} dx.$$

Рассмотрим сумму ядер Коши, умноженную на $1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}(x - i\omega_k)}$:

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}(x-i\omega_k)}) \sum_m \frac{c_{n,m}}{x - (\alpha m + i\omega_k)}.$$

Данное произведение будет лежать в пространстве $PW_{[0,\frac{2\pi}{\alpha}]}$. Любая целая функция из этого пространства может быть получена из некоторой квадратично суммируемой последовательности $\{c_{n,m}\}$.

Определим $P(x)$, $P_k(x)$ и $h_n(x)$:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{K}(1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}(x - i\omega_k)}), \tag{4}$$

$$P_k(x) = \frac{P(x)}{1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}(x - i\omega_k)}} = \sum_{s=0}^{N-1}(-1)^s A_{ks} e^{i\frac{2\pi}{\alpha}sx}, \tag{5}$$

$$h_n(x) = (1 - e^{i\frac{2\pi}{\alpha}x})\sum_m \frac{c_{n,m}}{x - \alpha m} \in PW_{[0,\frac{2\pi}{\alpha}]}. \tag{6}$$

Заметим, что, если $g \in L^2(\mathbb{R})$, то $|P(x)| \asymp 1$ для $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $\overline{g(x)} = \frac{\overline{f(x)}}{P(x)}$, поэтому выполнено $||g||_2 \asymp ||f||_2$. Тогда пользуясь формулами (4) – (6) получаем, что:

$$\sum_m c_{n,m}(g_{n,m}, f) = \sum_{k=1}^{N} a_k \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2\pi inx} P_k(x) h_n(x - i\omega_k) dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2\pi inx} \sum_{k=1}^{N} a_k P_k(x) h_n(x - i\omega_k) dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2\pi inx} \sum_{s=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{\alpha}sx}(-1)^s \sum_{k=1}^{N} a_k A_{ks} h_n(x - i\omega_k) dx. \tag{7}$$

Заметим, что подынтегральная сумма

$$M_s(x) = (-1)^s \sum_{k=1}^{N} a_k A_{ks} h_n(x - i\omega_k)$$

лежит в пространстве $PW_{[0,\frac{2\pi}{\alpha}]}$.

Для функции $h_n(x)$ выполнено соотношение:

$$h_n(x) = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{2\pi i\xi x} \check{h}_n(\xi) d\xi.$$

Сдвиг $h_n(x - i\omega_k)$ равен

$$h_n(x - i\omega_k) = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{2\pi i\xi x} e^{2\pi\xi\omega_k} \check{h}_n(\xi) d\xi. \tag{8}$$

Подставив представление $h_n(x - i\omega_k)$ из формулы (8), получим

$$M_s(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{2\pi i\xi x}\check{h}_n(\xi)(-1)^s \sum_{k=1}^{N} a_k A_{ks} e^{2\pi\xi\omega_k} d\xi.$$

Введем обозначение для подынтегральной суммы:

$$m_s(\xi) = (-1)^s \sum_{k=1}^{N} a_k A_{ks} e^{2\pi\xi\omega_k}. \tag{9}$$

Рассмотрим $G = \check{g}$, то есть $g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x} G(\xi) d\xi$. Тогда, продолжив равенство (7), получим

$$\sum_m c_{n,m}(g_{n,m}, f) = \sum_{s=0}^{N-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2\pi i(n+\frac{s}{\alpha})x} M_s(x) dx.$$

Просуммируем по n:

$$\sum_{n,m} |(g_{n,m}, f)|^2 = \int\limits_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} G(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi. \tag{10}$$

Таким образом, нам необходимо проверить следующее условие:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} G(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi \geq \varepsilon ||G||_2^2, \tag{11}$$

для любой функции $G \in L^2(\mathbb{R})$, некоторого $\varepsilon > 0$ и заданных выше функций $m_s(\xi)$. □

Общий вид $m_k(\xi)$, где $1 \leq k \leq N$, для рациональной функции g конечной степени N:

$$m_k(\xi) = \sum_{s=1}^{N} a_s e^{2\pi\xi w_s} \Big(\sum_{J \subset \{1,\dots,N\}, |J|=k, s \notin J} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_{j_1}} \dots e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_{j_{|J|}}} \Big). \tag{12}$$

Например, для $N = 3$:

$$m_0(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} + a_3 e^{2\pi\xi\omega_3};$$

$$-m_1(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) + a_3 e^{2\pi\xi\omega_3}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2});$$

$$m_2(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} + a_3 e^{2\pi\xi\omega_3} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}.$$

Замечание 2. *Верхняя оценка из определения фрейма* (1) *выполнена для всех рациональных функций конечной степени.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 7 по формуле (10) выполнено

$$\sum_{n,m} |(g_{n,m}, f)|^2 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} G(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi.$$

Верхняя оценка из определения фрейма (1) выполнена, поскольку функции $m_k(\xi)$ ограничены. □

3 Достаточное условие фреймовости

В этом параграфе мы найдем достаточные условия фреймовости систем Габора для рациональных функций. Пусть g — рациональная функция степени N, тогда достаточное условие может быть записано в виде невырожденности определителя некоторой $(N+1)$-диагональной матрицы.

3.1 Достаточное условие фреймовости для рациональных функций степени 2

В данном пункте мы будем рассматривать рациональные функции степени 2:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - i\omega_1} + \frac{a_2}{x - i\omega_2}.$$

Из уравнения (12):

$$m_0(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2};$$

$$-m_1(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}.$$

Рассмотрим $\alpha \in (\frac{n-2}{n-1}; \frac{n-1}{n}]$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1$. Рассмотрим матрицу C:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{0,0}(\xi) & m_{1,0}(\xi) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{0,1}(\xi) & m_{1,1}(\xi) & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & ... & & ... & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & m_{0,n-2}(\xi) & m_{0,n-2}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & m_{0,n-1}(\xi) & m_{0,n-1}(\xi) \end{pmatrix},$$

где $m_{k,l}(\xi) = m_k(\xi + y_l)$, а $y_l = l\varepsilon - 1$. Заметим, что матрица C — это квадратная матрица размера $n \times n$

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ — система Габора, где g — рациональная функция степени 2, $\alpha < 1$. Если матрица C невырожденная, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ фрейм.*

Доказательство. Матрица C невырожденная, поэтому определитель матрицы C равномерно отделен от 0, то есть существует константа $D > 0$

$$|\det(C(\xi))| > D$$

для любого ξ.

Разобьём интеграл на две части и обозначим их за I_1 и I_2

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} f(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi = \int_0^1 \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} f(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi +$$

$$\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} f(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi = I_1 + I_2.$$

Для начала рассмотрим I_1:

$$I_1 = \int_0^1 \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} f(\xi + n + \frac{s}{\alpha}) m_s(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\sum_{s=0}^{N-1} f(\xi + \frac{s}{\alpha}) m_s(\{\xi\})|^2 d\xi.$$

Положим v_ξ как бесконечную строку:

$$v_\xi = (f(\xi + \frac{m}{\alpha}))_{m, m\in\mathbb{Z}}.$$

Также зададим бесконечную блочно-диагональная матрицу A_ξ следующим образом:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ & \boxed{A_{-k}} & & & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & & \boxed{A_0} & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & \boxed{A_k} & \\ & & & & & & \dots \end{pmatrix},$$

где блоки A_j задаются так:

$$A_j = \begin{pmatrix} m_{0,0}(\xi) & m_{1,0}(\xi) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{0,1}(\xi) & m_{1,1}(\xi) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{0,n-2}(\xi) & m_{10,n-2}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_{0,n-1}(\xi) & m_{0,n-1}(\xi) \end{pmatrix},$$

где $m_{k,l}(\xi) = m_k(\{\xi + y_l\})$, а $y_l = l\varepsilon - 1 - j$.

Продолжив равенство для I_1, получаем следующее представление:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} ||A_\xi v_\xi||^2 d\xi \tag{13}$$

Вторая часть исходного интеграла I_2 корректирует матрицу A_ξ следующим образом:

$$A'_\xi = \begin{pmatrix} ... & & & & & & \\ & \boxed{A'_{-k}} & & & & & \\ & & ... & & & & \\ & & & \boxed{A'_0} & & & \\ & & & & ... & & \\ & & & & & \boxed{A'_k} & \\ & & & & & & ... \end{pmatrix},$$

где блоки A'_j задаются так:

$$A'_j = \begin{pmatrix} m_{0,0}(\xi+1) & m_{1,0}(\xi+1) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{0,0}(\xi) & m_{1,0}(\xi) & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{0,1}(\xi) & m_{1,1}(\xi) & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & ... & & ... & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & m_{0,n-2}(\xi) & m_{1n-2}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & m_{0,n-1}(\xi) & m_{0,n-1}(\xi) \end{pmatrix},$$

где $m_{k,l}(\xi) = m_k(\{\xi + y_l\})$, а $y_l = l\varepsilon - 1 - j$.

По предположению теоремы

$$|\det(A'_j(\xi))| > D.$$

Тогда аналогично неравенству (13) получаем представление для $I_1 + I_2$:

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} ||A'_\xi v_\xi||^2 d\xi.$$

Положим v_ξ^j следующим образом:

$$v_\xi^j = (f(\xi + \frac{m}{\alpha}))_{m, j(n-1) \le m \le (j+1)(n-1), m \in \mathbb{Z}}.$$

Распишем $||A'_\xi v_\xi||^2$ через A'_j и v_ξ^j:

$$||A'_\xi v_\xi||^2 = \sum_j ||A'_j v_\xi^j||^2 \ge D \sum_j ||v_\xi^j||^2.$$

Тогда продолжив равенство для $I_1 + I_2$ получим, что:

$$I_1 + I_2 \geq D \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_j ||v_\xi^j||^2 d\xi \geq D \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2 d\xi.$$

Таким образом, данная теорема доказана. $\square$

Достаточное условие фреймовости для рациональных функций степени 2 при $\alpha = \frac{n-1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}, n > 2$, заключается в невырожденности матрицы:

$$\begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ m_0(\xi-1) & m_1(\xi-1) & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0(\xi - \frac{n-2}{n-1}) & m_1(\xi - \frac{n-2}{n-1}) & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & ... & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & ... & m_0(\xi - \frac{1}{n-1}) & m_1(\xi - \frac{1}{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & m_0(\xi) & m_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Для случая $\alpha = \frac{n-1}{n}$ мы получаем матрицу размера $n \times n$.

Более подробно о рациональных функциях степени 2 мы поговорим в параграфе 4.

3.2 Достаточное условие фреймовости для рациональных функций степени 3

В данном пункте мы будем рассматривать рациональные функции степени 3:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - i\omega_1} + \frac{a_2}{x - i\omega_2} + \frac{a_3}{x - i\omega_3}.$$

Аналогично предыдущему случаю построим матрицу для $\alpha \in (\frac{n-2}{n-1}; \frac{n-1}{n}]$, где $n \in \mathbb{N}$. Данная матрица будет иметь размер $](2 + 1/(\frac{1}{\alpha} - 1))[\times](2 + 1/(\frac{1}{\alpha} - 1))[$, где $]\cdot[$ - округление целым числом сверху. Для начала зададим основной блок нашей матрицы, который является трехдиагональным:

$$M_3 = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{1,0} & m_{2,0} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{0,1} & m_{1,1} & m_{2,1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & ... & & ... & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & m_{0,n-2} & m_{1,n-2} & m_{2,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & m_{0,n-1} & m_{1,n-1} & m_{2,n-1} \end{pmatrix},$$

где $m_{0,k}(\xi) = m_0(\xi + k\varepsilon - 1), m_{1,k}(\xi) = m_1(\xi + k\varepsilon - 1), m_{2,k}(\xi) = m_2(\xi + k\varepsilon - 1)$. Тогда рассмотрим матрицу для $\alpha \in (\frac{n-2}{n-1}; \frac{n-1}{n}]$, где $n \in \mathbb{N}$:

$$C_3 = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\boxed{\qquad\qquad M_3 \qquad\qquad}} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_{0,n-1}(\xi-1) & m_{1,n-1}(\xi-1) & m_{2,n-1}(\xi-1) \end{pmatrix},$$

где $m_{k,l}(\xi) = m_k(\xi + y_l)$, а $y_l = l\varepsilon - 1$.

Заметим, что при $\alpha = \frac{n-1}{n}$ вспомогательный коэффициент $y_{n-1} = 0$.

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ — система Габора, где g — рациональная функция степени 3, $\alpha < 1$. Если матрица C_3 невырожденная, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ фрейм.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 8. □

Например, матрица для $N = 3$ и $\alpha = \frac{4}{5}$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_0(\xi-1) & m_1(\xi-1) & m_2(\xi-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0(\xi-\frac{3}{4}) & m_1(\xi-\frac{3}{4}) & m_2(\xi-\frac{3}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0(\xi-\frac{1}{2}) & m_1(\xi-\frac{1}{2}) & m_2(\xi-\frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0(\xi-\frac{1}{4}) & m_1(\xi-\frac{1}{4}) & m_2(\xi-\frac{1}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0(\xi-1) & m_1(\xi-1) & m_2(\xi-1) \end{pmatrix}$$

Более подробно о рациональных функциях степени 3 мы поговорим в параграфе 5.

3.3 Достаточное условие фреймовости для рациональных функций степени 4

В данном пункте мы будем рассматривать функции, представимые в виде суммы четырех ядер Коши:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - i\omega_1} + \frac{a_2}{x - i\omega_2} + \frac{a_3}{x - i\omega_3} + \frac{a_4}{x - i\omega_4}.$$

Для начала запишем уравнения для m_0, m_1, m_2, m_3, которые были описаны в уравнении 12:

$$m_0(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} + a_3 e^{2\pi\xi\omega_3} + a_4 e^{2\pi\xi\omega_4};$$

$$-m_1(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}) + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}) +$$

$$a_3e^{2\pi\xi\omega_3}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4})+a_4e^{2\pi\xi\omega_4}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3})$$

$$\begin{gathered}
m_2(\xi)=a_1e^{2\pi\xi\omega_1}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4})+\\
a_2e^{2\pi\xi\omega_2}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4})+\\
a_3e^{2\pi\xi\omega_3}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4})+\\
a_4e^{2\pi\xi\omega_4}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3});
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
-m_3(\xi)=a_1e^{2\pi\xi\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}+a_2e^{2\pi\xi\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}+\\
a_3e^{2\pi\xi\omega_3}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_4}+a_4e^{2\pi\xi\omega_4}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}.
\end{gathered}$$

Аналогично случаю суммы трех ядер Коши перед заданием общего вида матрицы, мы зададим вспомогательные блоки. В отличие от предыдущего случая нам будет необходимо два вспомогательных блока $M_{4,1}, M_{4,2}$

$$M_{4,1}=\begin{pmatrix}
m_{0,0} & m_{1,0} & m_{2,0} & m_{3,0} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & m_{0,1} & m_{1,1} & m_{2,1} & m_{3,1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & ... & & ... & & ... & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & m_{0,n-2} & m_{1,n-2} & m_{2,n-2} & m_{3,n-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & m_{0,n-1} & m_{1,n-1} & m_{2,n-1} & m_{3,n-1}
\end{pmatrix},$$

где $m_{0,k}(\xi)=m_0(\xi+k\varepsilon-1), m_{1,k}(\xi)=m_1(\xi+k\varepsilon-1), m_{2,k}(\xi)=m_2(\xi+k\varepsilon-1), m_{3,k}(\xi)=m_3(\xi+k\varepsilon-1)$;

$$M_{4,2}=\begin{pmatrix}
m^{'}_{0,0} & m^{'}_{1,0} & m^{'}_{2,0} & m^{'}_{3,0} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & m^{'}_{0,1} & m^{'}_{1,1} & m^{'}_{2,1} & m^{'}_{3,1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & ... & & ... & & ... & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & m^{'}_{0,n-2} & m^{'}_{1,n-2} & m^{'}_{2,n-2} & m^{'}_{3,n-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & m^{'}_{0,n-1} & m^{'}_{1,n-1} & m^{'}_{2,n-1} & m^{'}_{3,n-1}
\end{pmatrix},$$

где $m^{'}_{0,k}(\xi)=m_0(\xi+k\varepsilon-1), m^{'}_{1,k}(\xi)=m_1(\xi+k\varepsilon-1), m^{'}_{2,k}(\xi)=m_2(\xi+k\varepsilon-1), m^{'}_{3,k}(\xi)=m_3(\xi+k\varepsilon-1)$.

Тогда общий вид матрицы для $\alpha\in(\frac{n-2}{n-1};\frac{n-1}{n}]$, где $n\in\mathbb{N}$:

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc}
m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) & m_3(\xi) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0\\
\multicolumn{5}{c}{\boxed{\qquad\qquad M_{4,1}\qquad\qquad}} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{5}{c}{\boxed{\qquad\qquad M_{4,2}\qquad\qquad}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_0(h(\xi)) & m_1(h(\xi)) & m_2(h(\xi)) & m_3(h(\xi))
\end{array}\right),
$$

где $y_k = k\varepsilon - 1$, где $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1$ и $h(\xi) = \xi - 2 + y_{2n-2}$. Обозначим данную матрицу за C_4.
Заметим, что при $\alpha = \frac{n-1}{n}$ вспомогательный коэффициент $y_{2n-2} = 0$.

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ — система Габора, где g — рациональная функция степени 4, $\alpha < 1$. Если матрица C_4 невырожденная, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ фрейм.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 8. □

Более подробно о рациональных функциях степени 4 мы поговорим в параграфе 6.

4 Рациональные функции степени 2

В теореме 7 было описано достаточное условие для фреймовости системы Габора. В данном параграфе мы рассматриваем систему Габора, порожденную некоторой g — рациональной функцией степени 2 .

Теорема 11. *Если $m_1(\xi + y_k) \neq 0$, где*

$$m_1(\xi) = a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}$$

и

$$y_k = k\varepsilon - 1, \varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1,$$

то $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ фрейм.

Доказательство. Для проверки фреймовости достаточно проверить невырожденность следующей матрицы:

$$
\mathrm{M} = \begin{pmatrix}
m_0(\xi) & m_1(\xi) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{0,0}(\xi) & m_{1,0}(\xi) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & m_{0,1}(\xi) & m_{1,1}(\xi) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{0,n-2}(\xi) & m_{1,n-2}(\xi) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_{0,n-1}(\xi) & m_{1,n-1}(\xi)
\end{pmatrix},
$$

где $m_{l,k} = m_l(\xi - y_k)$ и $y_k = k\varepsilon - 1$. Данная матрица имеет размер $n \times n$, поэтому достаточно рассмотреть обнуление определителя. Определитель матрицы M:

$$\det(M) = \big(m_0(\xi)m_1(\xi-1) - m_1(\xi)m_0(\xi-1)\big)\prod_{k=1}^{n-1} m_1(\xi + y_k).$$

Лемма 1. *Пусть* $\xi \in \mathbb{C}$*, тогда*

$$m_0(\xi)m_1(\xi-1) - m_1(\xi)m_0(\xi-1) = 0$$

не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. Подставим m_0, m_1:

$$(a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2})(a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} e^{-2\pi\omega_1} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{-2\pi\omega_2}) -$$
$$(a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{-2\pi\omega_1} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{-2\pi\omega_2})(a_1 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + a_2 e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}) =$$
$$a_1^2(e^{2\pi\xi\omega_1} e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} e^{-2\pi\omega_1} - e^{2\pi\xi\omega_1} e^{-2\pi\omega_1} e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}) +$$
$$a_2^2(e^{2\pi\xi\omega_2} e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{-2\pi\omega_2} - e^{2\pi\xi\omega_2} e^{-2\pi\omega_2} e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}) +$$
$$a_1 a_2(e^{2\pi\xi\omega_1} e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{-2\pi\omega_2} + e^{2\pi\xi\omega_2} e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} e^{-2\pi\omega_1} -$$
$$e^{2\pi\xi\omega_1} e^{-2\pi\omega_1} e^{2\pi\xi\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} - e^{2\pi\xi\omega_2} e^{-2\pi\omega_2} e^{2\pi\xi\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}) =$$
$$a_1 a_2 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{2\pi\xi\omega_2}(e^{-2\pi\omega_1}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} - e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}) - e^{-2\pi\omega_2}(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} - e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1})) =$$
$$a_1 a_2 e^{2\pi\xi\omega_1} e^{2\pi\xi\omega_2}(e^{-2\pi\omega_1} - e^{-2\pi\omega_2})(e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} - e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1}) = 0.$$

Данное уравнение не имеет нетривиальных решений. □

Определитель матрицы M обнуляется, если $m_1(\xi + y_k) = 0$ для некоторого k.

Таким образом, данная теорема доказана. □

5 Рациональные функции степени 3

В параграфе 3 было найдено достаточное условие фреймовости для системы Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$, порожденной некоторой рациональной функции степени 3. В данном параграфе будем рассматривать $\alpha \geq \frac{4}{5}$. Рассмотрим матрицу из теоремы 9:

$$\begin{pmatrix}
m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & \\
 & & & \boxed{\begin{matrix} m_{2,k}(\xi) \\ m_{1,k+1}(\xi) \\ m_{0,k+2}(\xi) \end{matrix}} & & & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & m_{0,n-1}(\xi-1) & m_{1,n-1}(\xi-1) & m_{2,n-1}(\xi-1)
\end{pmatrix},$$

где $m_{k,l} = m_k(\xi + y_l)$ и $y_l = l\varepsilon - 1$. Обозначим данную матрицу за C_3.

Теорема 12. *Если столбец матрицы C_3*

$$(0, ..., m_{2,k}(\xi), m_{1,k+1}(\xi), m_{0,k+2}(\xi), ..., 0)^T$$

обратится в нулевой вектор, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ не фрейм.

Доказательство. Для того чтобы доказать данную теорему, необходимо привести пример последовательности функций f_k, для которой в пределе не выполнено интегральное неравенство (3). Рассмотрим некоторое $\xi_0 \in [\frac{1}{\alpha} - 1; 1]$, при котором зануляется столбец.

Рассмотрим последовательность функций $f_k \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f_k(\xi) = e^{-k(\xi-\xi_0)^2}.$$

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует k:

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \sum_n |\sum_{s=0}^{N-1} f_k\Big(\xi + n + \frac{s}{\alpha}\Big) m_s(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon ||f_k||_2^2,$$

поскольку

$$f_k\Big(\xi + n + \frac{s}{\alpha}\Big) \to 0$$

при $k \to \infty$ и $\xi+n+\frac{s}{\alpha} \neq \xi_0$. При $\xi+n+\frac{s}{\alpha} = \xi_0$ обращается в ноль соответствующее $m_s(\xi_0)$. $\square$

Если

$$\det(C) = 0,$$

где

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} & e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} & e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} \\ (e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) e^{2\pi\varepsilon\omega_1} & (e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) e^{2\pi\varepsilon\omega_2} & (e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}) e^{2\pi\varepsilon\omega_3} \\ e^{4\pi\varepsilon\omega_1} & e^{4\pi\varepsilon\omega_2} & e^{4\pi\varepsilon\omega_3} \end{pmatrix}$$

и $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1$, то существует набор (w_1, w_2, w_3), зануляющий столбец, по которому можно восстановить (a_1, a_2, a_3). Определитель данной матрицы равен:

$$\det(C) = e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} \big((e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) e^{2\pi\varepsilon\omega_2} e^{4\pi\varepsilon\omega_3} - (e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}) e^{2\pi\varepsilon\omega_3} e^{4\pi\varepsilon\omega_2}\big)$$

$$-e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3} \big((e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) e^{2\pi\varepsilon\omega_1} e^{4\pi\varepsilon\omega_3} - (e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2}) e^{2\pi\varepsilon\omega_3} e^{4\pi\varepsilon\omega_1}\big)$$

$$+e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} \big((e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_2} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) e^{2\pi\varepsilon\omega_1} e^{4\pi\varepsilon\omega_2} - (e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_1} + e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_3}) e^{2\pi\varepsilon\omega_2} e^{4\pi\varepsilon\omega_1}\big).$$

Рассмотрим несколько примеров нефреймовости, которые были получены при помощи компьютерного моделирования. Для начала рассмотрим несколько троек $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, которые зануляют определитель матрицы C:

1. $\omega_1 = -0.85 + 0.95i$, $\omega_2 = -0.9 - 0.9i$, $\omega_3 = -1 + 0.4i$ при $\alpha = \frac{4}{5}$;
2. $\omega_1 = -0.85 - 0.65i$, $\omega_2 = -0.9$, $\omega_3 = -0.95 + 0.9i$ при $\alpha = \frac{5}{6}$;

3. $\omega_1 = -0.88 - i$, $\omega_2 = -0.94 + 0.56i$, $\omega_3 = -1 - 0.28i$ при $\alpha = \frac{8}{9}$;

4. $\omega_1 = -0.88 - 0.79i$, $\omega_2 = -0.91 + 0.95i$, $\omega_3 = -0.97 + 0.05i$ при $\alpha = \frac{15}{16}$;

5. $\omega_1 = -0.84 - 0.84i$, $\omega_2 = -0.92 + 0.48i$, $\omega_3 = -0.96 - 0.24i$ при $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$;

6. $\omega_1 = -0.8 + 0.84i$, $\omega_2 = -0.88 + 0.04i$, $\omega_3 = -0.92 - 0.84i$ при $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

7. $\omega_1 = -0.88 + 0.16i$, $\omega_2 = -0.96 - 0.72i$, $\omega_3 = -1 + 0.96i$ при $\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Компьютерные вычисления троек $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ были произведены с погрешностью $re^{2\pi i\theta}$, где $r \leq 0.005$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Для того, чтобы вычислить коэффициенты a_1, a_2, a_3, при которых функция не будет являться фреймом, необходимо найти вектор $(v_1, v_2, v_3)^T$:

$$C \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $v_k = a_k e^{2\pi\xi w_k}$. Данное равенство должно быть выполнено для какого-то $\xi \in [\frac{1}{\alpha} - 1, 1]$. Компьютерные вычисления a_1, a_2, a_3 были выполнены с погрешностью $re^{2\pi i\theta}$, где $r \leq 0.001$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ниже приведены примеры функций, которые удовлетворяют нефреймовости:

1. для $\alpha = \frac{4}{5}$
$$f(x) = \frac{0.12 - 0.74i}{x - i(-0.85 + 0.95i)} + \frac{0.8 + 0.4i}{x - i(-0.9 - 0.9i)} + \frac{1}{x - i(-1 + 0.4i)};$$

2. для $\alpha = \frac{5}{6}$
$$f(x) = \frac{-2 - 1.07i}{x - i(-0.85 - 0.65i)} + \frac{0.78 - 0.78i}{x + 0.9i} + \frac{1}{3(x - i(-0.95 + 0.9i))};$$

3. для $\alpha = \frac{8}{9}$
$$f(x) = \frac{0.66i}{x - i(-0.88 - i)} + \frac{-0.21 - 0.85i}{x - i(-0.94 + 0.56i)} + \frac{1}{x - i(-1 - 0.28i)};$$

4. для $\alpha = \frac{15}{16}$
$$f(x) = \frac{-0.12 + 0.86i}{x - i(-0.88 - 0.79i)} + \frac{-0.27 - 0.93i}{x - i(-0.91 + 0.95i)} + \frac{1}{x - i(-0.97 + 0.05i)};$$

5. для $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$
$$f(x) = \frac{-1.59 + 0.38i}{x - i(-0.84 - 0.84i)} + \frac{-0.26 + 0.66i}{x - i(-0.92 + 0.48i)} + \frac{1}{x - i(-0.96 - 0.24i)};$$

6. для $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$$f(x) = \frac{0.43 + 0.82i}{x - i(-0.8 + 0.84i)} + \frac{-1.58 - 1.04i}{x - i(-0.88 + 0.04i)} + \frac{1}{x - i(-0.92 - 0.84i)};$$

7. для $\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$
$$f(x) = \frac{-0.65 - 0.38i}{x - i(-0.88 + 0.16i)} + \frac{0.21 + 0.88i}{x - i(-0.96 - 0.72i)} + \frac{1}{x - i(-1 + 0.96i)}.$$

6 Рациональные функции степени 4

В параграфе 3 было описано достаточное условие фреймовости для системы Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$, порожденной некоторой рациональной функции степени 4. В данном параграфе будем рассматривать $\alpha \geq \frac{5}{6}$. Вспомним матрицу из достаточного условия:

$$\begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) & m_3(\xi) & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & & ... & & & ... & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} m_{3,k}(\xi) \\ m_{2,k+1}(\xi) \\ m_{1,k+2}(\xi) \\ m_{0,k+3}(\xi) \end{matrix}} & & & & \\ & ... & & & ... & & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & m_0(h(\xi)) & m_1(h(\xi)) & m_2(h(\xi)) & m_3(h(\xi)) \end{pmatrix},$$

где $m_{k,l} = m_k(\xi + y_l)$, $y_l = l\varepsilon - 1$, $h(\xi) = \xi - 2 + a_{2n-2}$. Обозначим данную матрицу C_4.

Теорема 13. *Если столбец матрицы C_4*

$$(0, ..., m_{3,k}(\xi), m_{2,k+1}(\xi), m_{1,k+2}(\xi), m_{0,k+3}(\xi), ..., 0)^T$$

обратится в нулевой столбец, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, 1)$ не фрейм.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 12. $\square$

Если

$$\det(C) = 0,$$

где

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4, \end{pmatrix}$$

где

$$a_k = \prod_{j=1, j\neq k}^{4} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_j}; \quad b_k = e^{2\pi\varepsilon\omega_k} \sum_{(j,l)\in\{1,2,3,4\}\setminus\{k\}, j\neq l}^{4} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_j} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_l};$$

$$c_k = e^{4\pi\varepsilon\omega_k} \sum_{j=1, j\neq k}^{4} e^{\frac{2\pi}{\alpha}\omega_j}; \quad d_k = e^{6\pi\varepsilon\omega_k}$$

и $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1$, то существует набор (w_1, w_2, w_3, w_4), зануляющий столбец, по которому можно восстановить (a_1, a_2, a_3, a_4).

Рассмотрим несколько примеров нефреймовости, которые были получены при помощи компьютерного моделирования. Для начала рассмотрим $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, которые зануляют определитель матрицы C:

1. $\omega_1 = -0.85 - i$, $\omega_2 = -0.9 + 0.3i$, $\omega_3 = -0.95 + 0.95i$, $\omega_4 = -1 - 0.45i$ при $\alpha = \frac{5}{6}$;
2. $\omega_1 = -0.85 - i$, $\omega_2 = -0.9 + 0.75i$, $\omega_3 = -0.95 - 0.15i$, $\omega_4 = -1 + 0.55i$ при $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$;
3. $\omega_1 = -0.85 - i$, $\omega_2 = -0.9 - 0.15i$, $\omega_3 = -0.95 + 0.7i$, $\omega_4 = -1 + 0.55i$ при $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Компьютерные вычисления $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ были произведены с погрешностью $re^{2\pi i\theta}$, где $r \leq 0.005$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Аналогично прошлому случаю, для того чтобы вычислить коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, при которых функция не будет являться фреймом, необходимо найти вектор $(v_1, v_2, v_3, v_4)^T$:

$$C \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $v_k = a_k e^{2\pi\xi w_k}$. Данное равенство должно быть выполнено для какого-то $\xi \in [\frac{1}{\alpha} - 1, 1]$. Компьютерные вычисления a_1, a_2, a_3, a_4 были выполнены с погрешностью $re^{2\pi i\theta}$, где $r \leq 0.001$ и $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ниже приведены примеры функций, которые удовлетворяют нефреймовости:

1. для $\alpha = \frac{5}{6}$

$$f(x) = \frac{-0.15 + 0.27i}{x - i(-0.85 - i)} + \frac{-0.48 + 0.14i}{x - i(-0.9 + 0.3i)} + \frac{0.7 - 0.51i}{x - i(-0.95 + 0.95i)} + \frac{1}{x - i(-1 - 0.45i)};$$

2. для $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

$$f(x) = \frac{0.11 + 0.08i}{x - i(-0.85 - i)} + \frac{-0.19 + 0.11i}{x - i(-0.9 + 0.75i)} + \frac{-0.74 + 0.42i}{x - i(-0.95 - 0.15i)} + \frac{1}{x - i(-1 + 0.55i)};$$

3. для $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$f(x) = \frac{0.23 + 0.46i}{x - i(-0.85 - i)} + \frac{-1.04 - 0.05i}{x - i(-0.9 - 0.15i)} + \frac{0.05 + 0.2i}{x - i(-0.95 + 0.7i)} + \frac{1}{x - i(-1 + 0.55i)}.$$

Список литературы

[1] K. Grochenig. Foundations of Time-Frequency Analysis. *ISBN 978-1-4612-6568-9, 2000.*

[2] K. Seip. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. *I. J. Reine Angew. Math., 429:91-106, 1992.*

[3] K. Grochenig, J. Stockler. Gabor Frames and Totally Positive Functions. *Duke Math. J. 162, no. 6 (2013), 1003-1031, arXiv:1104.4894v1.*

[4] Sampling Theorems for Shift-invariant Spaces, Gabor Frames, and Totally Positive Functions. *Inventiones Mathematicae, 211(3):1119-1148, 2018, arXiv:1612.00651v2.*

[5] I. J. Schoenberg. On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre-Polya-Schur type. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 33(1): 11–17, 1947.*